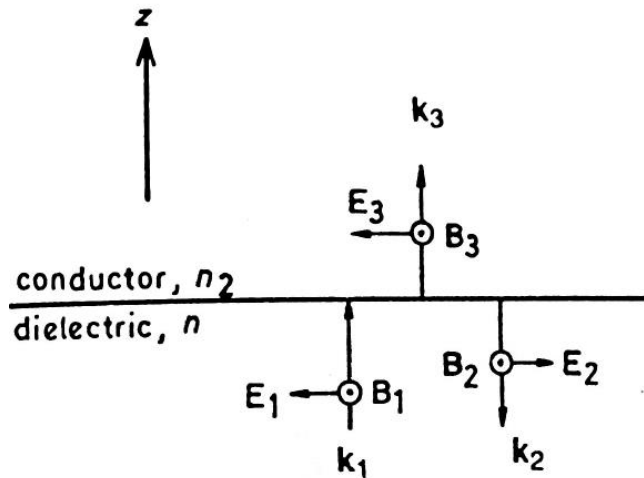


ข้อสอบปลายภาควิชา scpy 351 Vibrations Waves and Optics

วันที่ 18 ธันวาคม พ.ศ. 2560 เวลา 9.00 – 12.00 น.

ข้อสอบมีทั้งหมด 6 ข้อ คะแนนเต็ม 80 คะแนน

1. คลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าสถานะโพลาไรซ์เชิงเส้น ตกกระทบในแนวตั้งฉากที่ผิวรอยต่อระหว่างตัวกลาง dielectric (ตัวกลางตกกระทบ) ที่มีค่าดัชนีหักเห n และตัวกลาง conductor (ตัวกลางทะลุผ่าน) ที่มีค่าดัชนี $n_2 = n(1+i\rho)$ ดังรูป (โดยตัวกลางทั้งสองเป็น non-magnetic)



กำหนดให้ k_i เป็น propagation vector

จงตอบคำถามต่อไปนี้

- 1.1 (7 คะแนน) กำหนด wave function ของ electric field vector สำหรับคลื่นตกกระทบเขียนได้เป็น

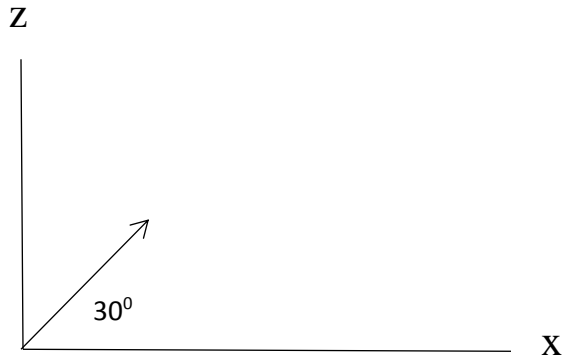
$\vec{E}_1 = -\hat{j}E_{10}e^{i(k_1z - \omega t)}$ จงเขียน wave functions ของ electric field vectors และ magnetic fields ที่เหลือโดยใช้รูปแบบฟังก์ชันที่สัมพันธ์กับคลื่นตกกระทบ (ให้คะแนน wave function ละ 1 คะแนน)

- 1.2 (4 คะแนน) โดยเลือกใช้สมการ Maxwell ที่เหมาะสมจงแสดงให้เห็นว่าทิศทางของสนามแม่เหล็กสำหรับคลื่นตกกระทบที่แสดงไว้ในรูปถูกต้อง

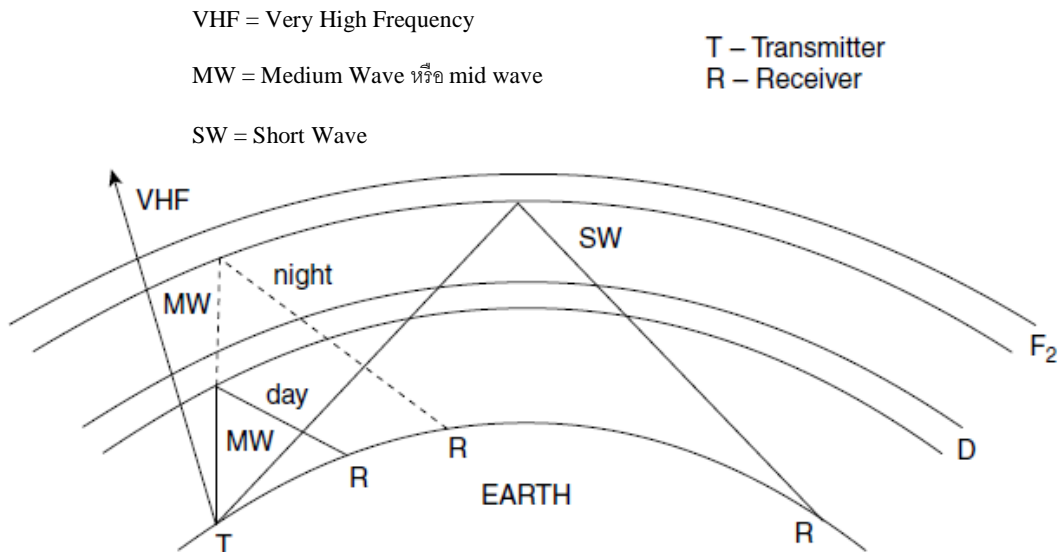
- 1.3 (9 คะแนน) จงแสดงให้เห็นว่าความต่างเฟสระหว่างคลื่นสะท้อนกับคลื่นตกกระทบของ electric field เขียนได้เป็น $\tan^{-1}(2/\rho)$

2. การเดินทางของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในพลาสมา

2.1 (5 คะแนน) กำหนดให้ค่าดัชนีหักเหของบรรยากาศเหนือพื้นโลกเป็นไปตามสมการ $n^2(Z) = 1 + \frac{Z}{H}$ เมื่อ Z เป็นความสูงเหนือพื้นโลก และ H เป็น ค่าคงที่ที่ไม่ใช่ศูนย์ ถ้าแนวการเดินทางของ EM wave จากตำแหน่งที่ส่ง สัญญาณเริ่มต้นเป็น $(x, z) = (0,0)$ ทำมุมกับแนวระดับ 30° ดังแสดงได้ดังรูปข้างล่าง จงหาความสูง $z = z_r$ ซึ่งเป็นความสูงขณะที่ EM wave เริ่มสะท้อนกลับหมดพอดี



2.2 รูปข้างล่างแสดงแนวการเดินทางของ EM waves ที่ช่วงคลื่นต่าง ๆ ซึ่งประกอบด้วย VHF, MW และ SW จากเครื่องส่ง (T) ไปยังเครื่องรับ (R) ด้วยการสะท้อนจากชั้นบรรยากาศ Ionosphere เหนือพื้นโลก จงตอบคำถามต่อไปนี้



2.2.1 (5 คะแนน) ปัจจัยใดบ้างที่มีผลต่อการเดินทางของ EM waves ดังแสดงในรูป

2.2.2 (10 คะแนน) บรรยายเหตุผลว่าเพราะเหตุใด EM waves ในแต่ละย่าน (VHF, MW และ SW) จึงมีแนวการเคลื่อนที่ตามที่แสดงในรูป และให้หาค่าความหนาแน่นของอิเล็กตรอน (electron density) ที่เรียกว่า critical electron density value ที่สัมพันธ์กับการเกิดการสะท้อนกลับหมดของ EM waves ในย่าน VHF, MW และ SW

ข้อมูลนี้อาจเป็นประโยชน์

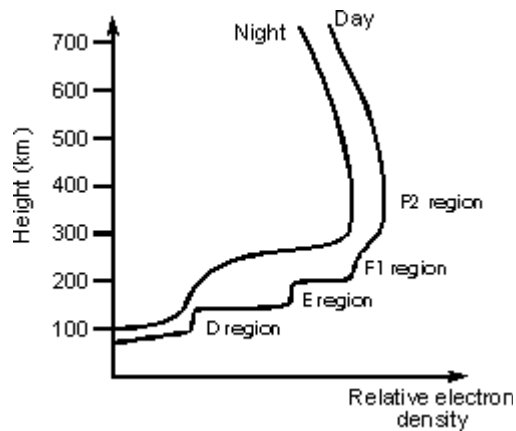


Table No.1

Range	Frequency	Wavelength
Long waves (LF)	30 - 300 kHz	10 km - 1 km
Mid waves (MF)	300 - 3000 kHz	100 m - 100 m
Short waves (HF)	3 - 30 MHz	100 m - 10 m
Ultra short waves:		
a. Metre range (VHF)	30 - 300 MHz	10 m - 1 m
b. Decimetre range (UHF)	300 - 3000MHz	100 cm - 1 cm
c. Centimetre range (SHF)	3 - 30 GHz	10 cm - 1 cm
d. Millimetre range (EHF)	30 - 300 GHz	10 mm - 1 mm

The approximate levels of ionisation in the ionosphere

wavebands

<https://www.electronics-notes.com/articles/antennas-propagation/ionospheric/sun-hf-radio-propagation.php>

<https://www.mikroe.com/ebooks/radio-receivers-from-crystal-set-to-stereo/wavebands>

3. (10 คะแนน) Wave function สำหรับอนุภาคที่ถูกกักอยู่ใน rectangular potential well ที่ความต่างศักย์ $V = 0$ สามารถบรรยายได้ด้วยสมการ Shrodinger's time-dependent ดังนี้

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = -\frac{8\pi^2 m}{h^2} E \Psi$$

เมื่อ E คือ พลังงานของอนุภาค m คือ มวล และ h คือ ค่าคงตัวของ Planck

กำหนด boundary conditions : $\Psi = 0$ ที่ $x = y = z = 0$ และ ที่ $x = L_x, y = L_y, z = L_z$ เมื่อ

L_x, L_y, L_z เป็น dimensions ของ potential well

ด้วยวิธีการ separation of variables จึงแสดงให้เห็นว่า solution สำหรับสมการ Shrodinger's time-dependent เขียนได้เป็น

$$\Psi = A \sin \frac{l\pi x}{L_x} \sin \frac{r\pi y}{L_y} \sin \frac{n\pi z}{L_z}$$

$$\text{โดยที่ } E = \frac{h^2}{8m} \left(\frac{l^2}{L_x^2} + \frac{r^2}{L_y^2} + \frac{n^2}{L_z^2} \right) = E_x + E_y + E_z \text{ และ } l, r, n \text{ คือ integers}$$

4. กำหนดให้ finite wave train ของคลื่นแสงเคลื่อนที่ในสุญญากาศ ที่มีความยาวคลื่นกึ่งกลาง λ_0 เขียนได้เป็น

$$f(t) = f_0 e^{i2\pi\nu_0 t} \text{ เมื่อ } f_0 \text{ คือ แอมพลิจูด และมีค่าอยู่ในช่วงเวลา } \pm \tau/2$$

- 4.1 (5 คะแนน) เนื่องจากเราสามารถพิจารณาได้ว่า finite wave train เกิดจาก superposition ของ wave functions

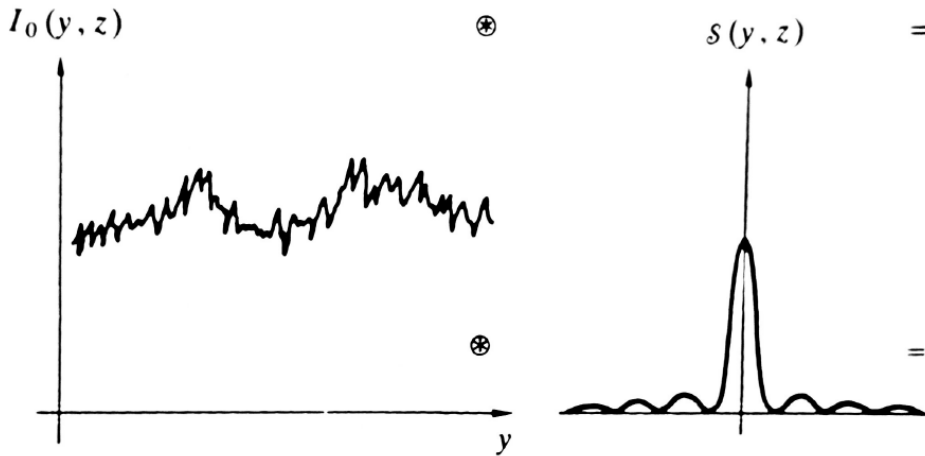
$F(\nu)$ ใน frequency domain ที่มีความถี่ต่าง ๆ กัน โดยอาศัย Fourier Transform จึงแสดงให้เห็นว่า

$$F(\nu) = f_0 \tau \frac{\sin[\pi(\nu - \nu_0)\tau]}{\pi(\nu - \nu_0)\tau}$$

- 4.2 (5 คะแนน) จงวาดกราฟคร่าว ๆ ของ $F(\nu)$ และระบุค่า ν สำหรับ central maximum และ first minimum ของ $F(\nu)$ ให้ชัดเจน

- 4.3 (5 คะแนน) ถ้า frequency range ระหว่าง first minima เขียนได้เป็น $2\Delta\nu$ และผลคูณระหว่างอัตราเร็วคลื่นแสงในสุญญากาศ c และ τ เป็นปริมาณที่เรียกว่า coherence length $l (= c\tau)$ จึงแสดงให้เห็นว่า coherence length ดังกล่าวเขียนได้เป็น $\lambda_0^2 / \Delta\lambda$ เมื่อ $\Delta\lambda$ คือ differential change ของความยาวคลื่นที่สัมพันธ์กับ differential change ของความถี่ $\Delta\nu$

5. (8 คะแนน) จงวาดภาพของ convolution : $I(y, z) \otimes S(y, z)$ และใช้ convolution theorem ทั่ว Fourier transform ของ convolution ที่ได้



6. (7 คะแนน) โดยอาศัย Jones calculus จงแสดงให้เห็นว่า linear retarder ใด ๆ ที่ทำมุม 45° (กับแนวแกน x) ระหว่าง quarter-wave plate ที่มี optic axis ในแนวแกน x (horizontal axis) และ quarter-wave plate ที่มี optic axis ในแนวแกน y (vertical axis) สามารถหมุนแนวแสงตกกระทบไปด้วยมุม $\eta/2$
กำหนด Jones matrices ของ retarders ดังในตารางข้างล่าง
(จาก https://en.wikipedia.org/wiki/Jones_calculus)

Phase retarders	Corresponding Jones matrix
Quarter-wave plate with fast axis vertical ^{[2][note 1]}	$e^{i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$
Quarter-wave plate with fast axis horizontal ^[2]	$e^{-i\pi/4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$
Quarter-wave plate with fast axis at angle θ w.r.t the horizontal axis	$e^{-i\pi/4} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + i \sin^2 \theta & (1-i) \sin \theta \cos \theta \\ (1-i) \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta + i \cos^2 \theta \end{pmatrix}$
Half-wave plate with fast axis at angle θ w.r.t the horizontal axis ^[3]	$e^{-i\pi/2} \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$
Arbitrary birefringent material (as phase retarder) ^[4]	$\begin{pmatrix} e^{i\eta/2} \cos^2 \theta + e^{-i\eta/2} \sin^2 \theta & (e^{i\eta/2} - e^{-i\eta/2})e^{-i\phi} \cos \theta \sin \theta \\ (e^{i\eta/2} - e^{-i\eta/2})e^{i\phi} \cos \theta \sin \theta & e^{i\eta/2} \sin^2 \theta + e^{-i\eta/2} \cos^2 \theta \end{pmatrix}$

กำหนด (1) สำหรับ linear retarder $\phi = 0$

(2) θ คือ มุมระหว่าง fast axis เทียบกับแกน x

และ (3) $\eta = \phi_y - \phi_x =$ ความต่างเฟสระหว่าง fast และ slow axes